УДК 378.016:51

Полина Евгеньевна Кед
Оксана Александровна Васенина-Кириллова
г. Шадринск

Использование координатно-векторного метода при решении задач по стереометрии

В данной статье авторы рассматривают применение координатно-векторного метода при решении стереометрических задач, который можно использовать на Едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике профильного уровня. В статье перечисляют достоинства использования данного метода при решении задач стереометрии. К тому же данный метод отличается четким алгоритмом, который включается в себя введение прямоугольной системы координат, определение координат точек и применение соответствующих формул для вычисления углов, расстояний и других величин. Также в статье на примере задачи №14 ЕГЭ авторы демонстрируют эффективность использования векторного метода по сравнению с аналитическим.

Ключевые слова: стереометрия, Единый государственный экзамен, координатно-векторный метод, решение задач, аналитический метод.

Polina Evgenievna Ked
Oksana Aleksandrovna Vasenina-Kirillova
Shadrinsk

Using the coordinate-vector method in solving stereometry problems

The article views the coordinate-vector method in solving stereometric problems which can be used in the Unified State Exam (USE) in mathematics at the profile level. The article lists the advantages of using this method in solving stereometry problems. In addition, this method is characterized by a clear algorithm that includes the introduction of a rectangular coordinate system, the determination of point coordinates and the application of appropriate formulas for calculating angles, distances and other quantities. The authors give the example of task No. 14 of the Unified State Exam and demonstrate the effectiveness of using the vector method in comparison with the analytical one.

Keywords: stereometry, Unified State Exam, coordinate-vector method, problem solving, analytical method.

В сфере математического образования, особенно при подготовке к Единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике профильного уровня, стереометрические задачи представляют серьезную проблему для многих учащихся. Данные задачи требуют глубокого понимания геометрических понятий и умения применять их на практике.

Традиционно для решения задач стереометрии используют аналитический метод, но он приводит к длительным и громоздким решениям, что увеличивает вероятность появления ошибок, особенно на самом экзамене.

Но альтернативой данному методу является координатно-векторный (векторный) метод. Он упрощает решения стереометрических задач, делает его алгоритмичным и меньше подвергается ошибкам [1].

Координатно-векторный метод удобен тем, что позволяет свести геометрическую задачу к виду алгебраической, что делает ее более доступной для многих школьников. Кроме того, решение задачи, с использованием данного метода обладает четким алгоритмом, что существенно упрощает процесс нахождения решения [9].

Алгоритм решения задач методом координат включает в себя следующие этапы.

1 этап. Необходимо ввести прямоугольную систему координат.

2 этап. Нужно найти координаты необходимых точек в выбранной системе координат.

3 этап. Использовать алгоритм нахождения угла между прямыми, угла между плоскостями и так далее [2].

Для использования координатно-векторного метода необходимо знать следующие формулы и понятия: координаты вектора; угол между прямыми; уравнение плоскости, нормаль; расстояние от точки до плоскости; угол между плоскостями; угол между прямой и плоскостью; расстояние между скрещивающимися прямыми [4].

Рассмотрим все формулы, перечисленные выше.

Координаты вектора. Для того чтобы определить координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала вектора.

Пусть даны точки $N(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $P(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда можно найти координаты вектора $\overrightarrow{NP}$ по следующей формуле:

$$\overrightarrow{NP}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Угол между прямыми в пространстве – это острый вертикальный угол, который образован двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данными прямым. На рисунках 1 и 2 изображены скрещивающиеся и пересекающиеся прямые соответственно [10].

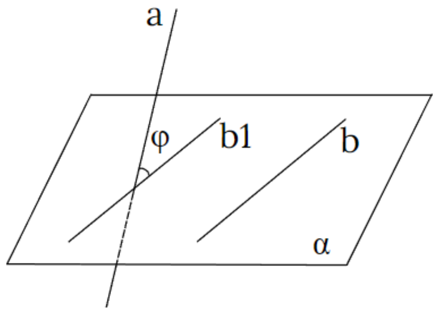

Рис. 1. Скрещивающиеся прямые в пространстве

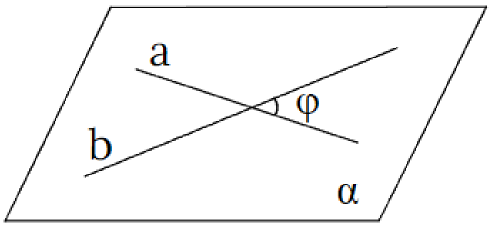

Рис. 2. Пересекающиеся прямые в пространстве

Также существует формула для нахождения косинуса угла между данными прямыми (векторами). Пусть даны векторы $\vec{c}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{d}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$. Тогда косинус угла β между данными векторами равен

$$\cos\varphi = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

Уравнение плоскости в общем виде выглядит следующим образом:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

где A, B, C и D – некоторые числа.

Пусть даны точки $K(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $P(x_2;\ y_2;\ z_3)$ и $L(x_3;\ y_3;\ z_3)$. Подставим координаты данных точек в общее уравнение плоскости:

$$\begin{cases} A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D = 0, \\ A \cdot x_2 + B \cdot y_2 + C \cdot z_2 + D = 0, \\ A \cdot x_3 + B \cdot y_3 + C \cdot z_3 + D = 0. \end{cases}$$

Получилась система из трех уравнений, где неизвестных – четыре. Смотря на условие задачи, можно D приравнять к единице ($D = 1$), если плоскость не проходит через начало координат, или приравнять к нулю ($D = 0$), если плоскость проходит через начало координат.

После данной подстановки систему будет иметь три уравнения и три неизвестных, следовательно, можно решить систему.

Вектор называется *нормальным* или *нормалью плоскости*, когда он перпендикулярен плоскости φ (рис. 3) [6].

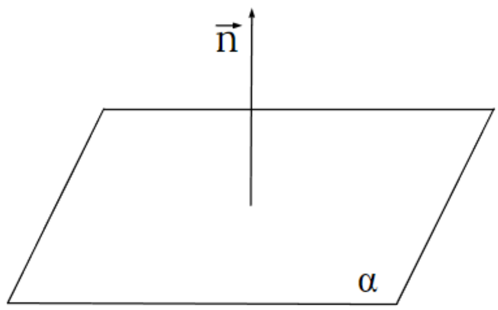

Рис. 3. Нормальный вектор (нормаль плоскости)

Если плоскость задана уравнением $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, то вектор нормали будет иметь координаты $\vec{n}\{A, B, C\}$. Эту особенность можно использовать не всегда, но она дает возможность быстро составить уравнение плоскости [3].

Расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, который опущен из точки F на плоскость α (рис. 4) [8].

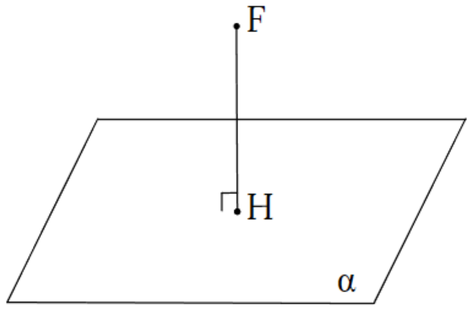

Рис. 4. Расстояние от точки до плоскости

Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, нужно знать координаты этой точки $F(x_F;\ y_F;\ z_F)$ и уравнение плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$:

$$\rho = \frac{|A \cdot x_F + B \cdot y_F + C \cdot z_F + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Углом между плоскостями называется такой угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях (рис. 5) [6].

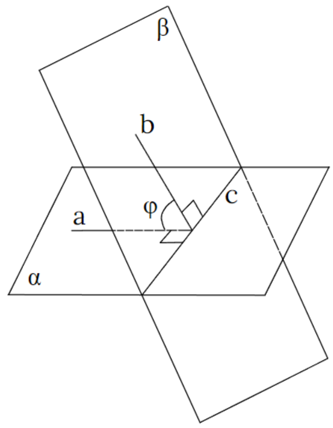

Рис. 5. Угол между плоскостями

Пусть известны уравнения двух плоскостей:

$$A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot y_1 + C_1 \cdot z_1 + D_1 = 0,$$
$$A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot y_2 + C_2 \cdot z_2 + D_2 = 0.$$

Тогда косинус угла между данными плоскостями можно найти следующим образом:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 6).

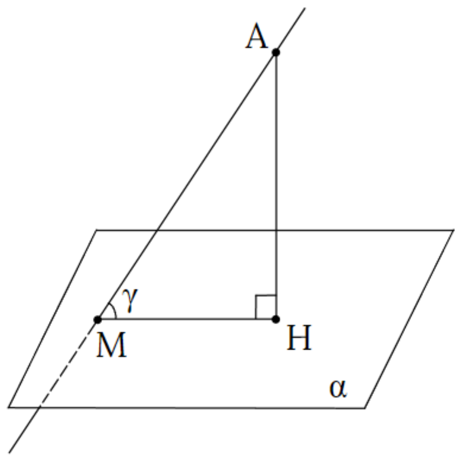

Рис. 6. Угол между прямой и плоскостью

Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, необходимо знать уравнение плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ или координаты нормали к рассматриваемой плоскости $\vec{n}\{A, B, C\}$. Следовательно, синус угла между прямой и плоскостью находится по формуле:

$$\sin\gamma = \frac{|A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется такое расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, которое проходит через другую прямую параллельно первой [7].

Исходя из этого, для решения задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми необходимо применять формулу нахождения расстояния от точки до плоскости, записанной выше [5].

Рассмотрим решение задачи №14 ЕГЭ по математике профильного уровня координатно-векторным (координатным) и аналитическим методами.

Задача. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF, где E – середина ребра A_1B_1, а F – середина ребра B_1C_1.

Решение.

Первый способ. Координатно-векторный метод.

Впишем в прямоугольную систему координат в пространстве единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7).

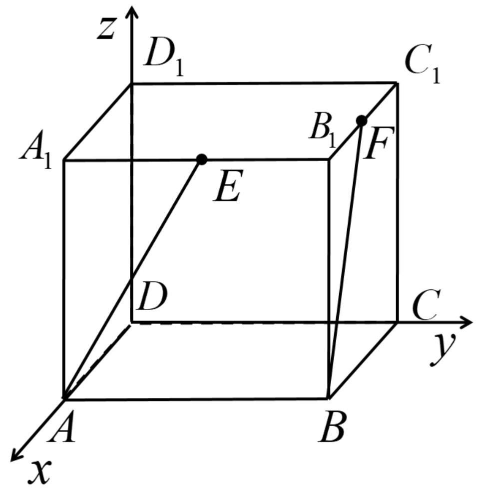

Рис. 7. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в прямоугольной системе координат в пространстве

Так как куб единичный, то следующие точки будут иметь координаты: $A(1;0;0)$, $E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $B(1;1;0)$, $F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$:

$$\overrightarrow{AE}\left\{0;\ \frac{1}{2};\ 1\right\}, \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right\}.$$

Таким образом, найдем косинус угла между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BF}|} = \frac{0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot 1}{\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5};$$

$$\varphi = \arccos\frac{4}{5}.$$

Второй способ. Аналитический метод.

Необходимо выполнить чертеж единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8).

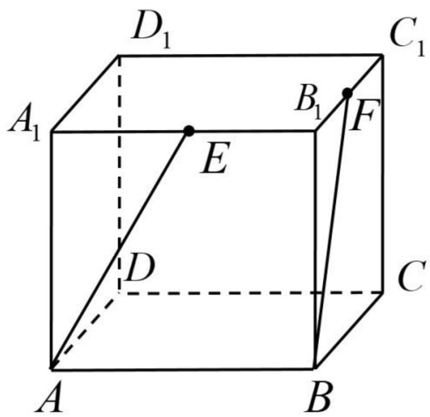

Рис. 8. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Отметим точку K, которая лежит на середине ребра A_1D_1.

Соединим точки A и K, а также B и F. Получим отрезки AK и BF. Заметим, что AK параллельно BF.

Проведем отрезок AE и полученный угол KAE будет равным φ.

Рассмотрим треугольник KAE. AE равно AK, так как отрезки проведены из общей вершины куба A к серединам ребер A_1B_1 и A_1D_1 в точках E и K соответственно. Следовательно данный треугольник является равнобедренным.

Чтобы найти боковые стороны треугольника KAE, можно рассмотреть один из прямоугольных треугольников AA_1E и AA_1K и по теореме Пифагора найти стороны AE и AK.

$$AE = AK = \sqrt{A_1A^2 + A_1E^2} = \sqrt{A_1A^2 + A_1K^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник KA_1E. По теореме Пифагора найдем сторону KE.

$$KE = \sqrt{A_1K^2 + A_1E^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Далее по теореме косинусов для треугольника KAE найдем угол φ.

$$KE^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos\varphi;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \cos\varphi;$$

$$\frac{2}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{2} \cdot \cos\varphi;$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot \cos\varphi;$$

$$\frac{5}{2} \cdot \cos\varphi = \frac{5}{2} - \frac{1}{2};$$

$$\frac{5}{2} \cdot \cos\varphi = 2;$$

$$\cos\varphi = \frac{4}{5};$$

$$\varphi = \arccos\frac{4}{5}.$$

Можно сделать вывод, что координатно-векторный метод является простым в применении. Его преимущество над другими методами заключается через привлечение малого количества теорем. Можно выделить единственный недостаток данного метода – это большой объем вычислений. Но все же метод координат поможет быстро решить стереометрическую задачу №14 на ЕГЭ по математике профильного уровня.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бикиева, А.Ф. Методы решения стереометрических задач / А.Ф. Бикиева. – Текст : непосредственный // Обучение и воспитание: методики и практика. – 2016. – № 25. – С. 32-38.
2. Бирюлина Е.В. Решение стереометрической задачи ЕГЭ координатно-векторным методом / Е.В. Бирюлина. – Брянск : ИП Усова И.Н., 2022. – 50 с. – Текст : непосредственный.
3. Вергазова, О.Б. Применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень) / О.Б. Вергазова. – Текст : непосредственный // Концепт. – 2017. – № 1. – С. 153-162.

4. Голубев, А.А. Векторно-координатный метод решения геометрических задач / А.А. Голубев, Т.А. Спасская. – Текст : непосредственный // Преподавание математики в школах Тверского региона : сб. материалов в помощь учителю / Тверской гос. ун-т, Тверская регион. общест. организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской обл.» ; ред. кол. А.А. Голубев; О.Е. Баранова. – Тверь : Тверской государственный университет, 2017. – Вып. 2. – С. 86-100.
5. Косярский, А.А. Визуализация при решении стереометрических задач ЕГЭ по математике через использование координатно-векторного метода / А.А. Косярский, О.В. Мороз. – Текст : непосредственный // Школьные технологии. – 2020. – № 3. – С. 89-97.
6. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Л. С. Атанасян [и др.]. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Просвещение, 2019. – 287 с. – Текст : непосредственный.
7. Разакова, А.Т. Решение геометрических задач методом координат. Суть метода координат / А.Т. Разакова. – Текст : непосредственный // Модернизация математического образования в школе и вузе : материалы регион. науч.-практ. конф. студентов, магистрантов и аспирантов ДГПУ, Махачкала, 24–25 марта 2017 г. – Махачкала : ИП Овчинников Михаил Артурович (Типография Алеф), 2017. – С. 67-70.
8. Сапарова, Д.Х. Координатный метод как один из рациональных способов решения стереометрических задач / Д. Х. Сапарова, А. В. Минкин. – Текст : непосредственный // Форум молодых ученых. – 2018. – №11-2 (27). – С. 541-545.
9. Сидорякина В.В. Специфика использования метода координат при решении стереометрических задач в средней школе / В.В. Сидорякина, Л.Н. Аксайская, Е.А. Кумакова. – Текст : непосредственный // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. – 2017. – № 2. – С. 241-245.
10. Тулинова, О.А. Об эффективности использования координатно-векторного метода при решении стереометрических задач в средней школе / О.А. Тулинова. – Текст : непосредственный // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. – 2018. – № 1. – С. 228-230.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

П.Е. Кед, студентка 4 курса, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: polinaked6@gmail.com.

О.А. Васенина-Кириллова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: 970013@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

P.E. Ked, 4th year Student, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: polinaked6@gmail.com.

O.A. Vasenina-Kirillova, Ph. D. in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: 970013@mail.ru.