УДК 37.016:51

Татьяна Александровна Оболдина,
Анатолий Иванович Хайдуков
г. Шадринск

Наибольший общий делитель многочленов и способы его нахождения

В данной статье авторы рассматривают одно из ключевых понятий алгебры «наибольший общий делитель многочленов» и его основные свойства, проводя аналогию с числами в теории чисел. В статье описываются два способа нахождения наибольшего общего делителя. Первый из них основан на использовании алгоритма Евклида – последовательном делении одного многочлена на другой, пока не получим остаток ноль. Для многочленов f(x) и g(x) последний ненулевой остаток ($r_n(x)$) является наибольшим общим делителем многочленов f(x) и g(x).

Второй способ - с помощью табличной формы записи М.В. Яковкина – советского математика, опубликовавшего данный метод в 1954 году. Данный метод интересен, более компактен, тем самым является рациональным способом нахождения наибольшего общего делителя многочленов. Оба метода иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида, схема Яковкина.

Tatyana Alexandrovna Oboldina,
Anatoly Ivanovich Khaydukov
Shadrinsk

The polynomials greatest common divisor and ways to find it

The authors consider the concept of algebra “the greatest common divisor of polynomials” and its main properties, drawing an analogy with numbers in number theory. The article describes two ways of finding the largest common divisor. The first of them is based on using the Euclid algorithm – sequentially dividing one polynomial by another until we get the remainder zero. For polynomials f(x) and g(x), the last nonzero remainder (rn(x)) is the largest common divisor of polynomials f(x) and g(x).

The second method is based on using the tabular form of a Soviet mathematician M.V. Yakovkin who published it in 1954. This method is interesting, more compact and thus is a rational way to find the largest common divisor of polynomials. The authors illustrate both methods with examples.

Keywords: the Polynomials greatest common divisor, the Euclid algorithm, the Yakovkin scheme.

Математика - это уникальная наука, способная проникнуть в самые глубинные отделы абстрактного мышления. Одной из ее важных областей является алгебра, которая изучает различные алгебраические структуры, в том числе и многочлены. Многочлены являются основополагающими единицами в алгебре, и понимание их свойств и операций крайне важно для практических применений, а также для дальнейшего изучения математики.

Однако, что делать, если нужно найти наибольший общий делитель многочленов? Попробуем ответить на поставленный вопрос и более подробно рассмотреть, что такое наибольший общий делитель многочленов и как его можно найти, ведь наибольший общий делитель многочленов является важным понятием в алгебре и нахождение его помогает в решении различных математических задач.

Наибольший общий делитель (НОД) многочленов ─ это общий делитель максимально возможной степени, который является множителем исходных многочленов [3,4].

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ будут многочленами коэффициентами в целочисленной области Z, обычно это поле или целые числа. Наибольший общий делитель из $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ ─ это многочлен $d(x)$, который делит $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, и такой, что каждый общий делитель из $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ также делит $d(x)$. Таким образом, можно сказать, что наибольший общий делитель многочленов является наименьшим общим кратным их общих делителей.

Если Z является полем, а многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ не равны нулю, многочлен $d(x)$ является наибольшим общим делителем тогда и только тогда, когда он делит каждый многочлен без остатка $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, и он имеет наибольшую степень среди многочленов, обладающих этим свойством. Если наибольший общий делитель многочленов равен константе, то они называются взаимно простыми. Если же $f_1(x) = f_2(x) = … = f_n(x) = 0$, то наибольший общий делитель равен нулю. Однако существует мнение, что в данном случае он не определен.

Наибольший общий делитель $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ обычно обозначается «НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$)».

Наибольший общий делитель не уникален: если d является НОД от многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, то многочлен $s(x)$ является другим НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$) тогда и только тогда, когда существует обратимый элемент c из Z такой, что

$$\boldsymbol{s = c \times d}$$

и

$$\boldsymbol{d = c^{-1} \times s.}$$

Другими словами, НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$) уникален с точностью до числового множителя.

Свойства НОД многочленов похожи на свойства НОД целых чисел:

1. Если $d(x)$ = НОД ($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$), то множество всех делителей $d(x)$ совпадает с множеством всех общих делителей многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$.
2. Постоянный нуль - это НОД ($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$) тогда и только тогда, когда все многочлены есть постоянные нуль.
3. $d(x)$ является НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, 0) тогда и только тогда, когда $d(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$).
4. Пусть $d(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$). Тогда все многочлены $c \times d(x)$, где c – любая постоянная и $c \neq 0$, и только эти многочлены являются всевозможными наибольшими общими делителями многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$.
5. Если $d(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$) и c – старший коэффициент многочлена $d(x)$, то $\left(\frac{1}{c}\right) \times d(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$).
6. Если один из многочленов $f_m(x)$ совокупности $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ является делителем всех их, то $f_m(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$).
7. Пусть $f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$. Каждый общий делитель многочленов $g(x)$ и $r(x)$ будет общим делителем и для многочленов $f(x)$и $g(x)$. И наоборот, всякий общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ будет общим делителем $g(x)$ и $r(x)$.

Поэтому если $d(x)$ = НОД($d(x)$, $r(x)$), то $d(x)$ = НОД($f(x)$, $g(x)$), и обратно.

8. Если $d_1(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$) и $d(x)$ = НОД($d_1(x)$, $f_{n+1}(x)$), то $d(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$).
9. Пусть $d(x)$ = НОД($f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$) и степень $d(x)$ равна k. Так как $d(x)$ делится на всякий общий делитель многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, то степени общих делителей этих многочленов не превосходят k.

Наибольший общий делитель двух многочленов $f(x)$, $g(x)$ может быть найден при помощи алгоритма Евклида.

Алгоритм Евклида - это метод, который работает для любой пары многочленов [1,2,5,6,7]. В нем многократно используется деление «уголком». При этом степень многочленов уменьшается на каждом этапе. Деление проходит до тех пор, пока не получится нулевой остаток. Это дает цепочку равенств:

$f(x) = g(x) \times q_1(x) + r_1(x),$

$g(x) = r_1(x) \times q_2(x) + r_2(x),$

$r_1(x) = r_2(x) \times q_3(x) + r_3(x),$

$\dots$

$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x) \times q_n(x) + r_n(x),$

$r_{n-1}(x) = r_n(x) \times q_{n+1}(x) + 0.$

Последний ненулевой остаток ($r_n(x)$) является наибольшим общим делителем многочленов f(x) и g(x).

Рассмотрим простейший пример использования алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя многочленов f(x) и g(x).

Пример: Найти наименьший общий делитель двух многочленов:

$f(x) = 4x^2-2x-2$

$g(x) = 2x.$

Решение:

1) Разделим один из многочленов на другой $-$ f(x) ÷ g(x). Делить будем до тех пор, пока степень разности не станет меньше степени делителя.

$$\begin{array}{r|l} \_\ 4x^2 - 2x - 2 & 2x \\ \cline{2-2} 4x^2 \quad\quad\quad & 2x - 1 \\ \hline \_\ -2x \quad\ \ & \\ -2x \quad\ \ & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$r_1(x) = -2$

Ранее уже упоминалось, что НОД многочленов определяется с точностью до числового множителя. Поэтому второй остаток умножим на (-1).

$r_1'(x) = (-1)\times(-2) = 2$

2) Затем разделим делитель на первый остаток при получении от деления $-$ $g(x) \div r_1(x)$.

$$\begin{array}{r|l} \_\ 2x & 2 \\ \cline{2-2} 2x & x \\ \hline 0 & \end{array}$$

$r_2(x) = 0$

Остаток оказался равен нулю. Следовательно, последний ненулевой (первый) остаток от деления является искомым наибольшим общим делителем двух многочленов.

НОД(f(x);g(x)) = $r_1'(x) = 2$

Теперь рассмотрим более сложный пример нахождения наибольшего общего делителя с помощью алгоритма Евклида.

Пример: Найти наибольший общий делитель двух многочленов:

$f(x) = x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$

Решение:

3) Разделим один из многочленов на другой $-$ f(x) ÷ g(x). Делить будем до тех пор, пока степень разности не станет меньше степени делителя .

$$\begin{array}{r|l} \_\ x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \cline{2-2} x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x \quad\quad & x - 3 \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
\hline
\_\ -3x^5+3x^4+4x^3+6x^2-8 \\
-3x^5+3x^4+3x^3-3x^2+12x+12 \\
\hline
x^3+9x^2-12x-20
\end{array}
$$

$r_1(x) = x^3 + 9x^2 - 12x - 20$

4) Затем разделим делитель на первый остаток при получении от деления $-$ $g(x) \div r_1(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
\_\ x^5-x^4-x^3+x^2-4x-4 & x^3+9x^2-12x-20 \\
\cline{2-2}
x^5+9x^4-12x^3-20x^2 & x^2-10x+101 \\
\cline{1-1}
\_\ -10x^4+11x^3-21x^2-4x-4 & \\
-10x^4-90x^3+120x^2+200x & \\
\cline{1-1}
\_\ 101x^3-99x^2-204x-4 & \\
101x^3+909x^2-1212x-2020 & \\
\cline{1-1}
-1008x^2+1008x+2016 &
\end{array}
$$

$r_2(x) = -1008x^2 + 1008x + 2016$

Второй остаток умножим на $\left(-\frac{1}{1008}\right)$.

$r'_2(x) = \left(-\frac{1}{1008}\right)\times(-1008x^2 + 1008x + 2016)$

Следовательно, $r'_2(x) = x^2 - x - 2$

5) Теперь разделим первый остаток от деления на полученный второй $-$ $r_1(x) \div r'_2(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
\_\ x^3+9x^2-12x-20 & x^2-x-2 \\
\cline{2-2}
x^3-x^2-2x & x-3 \\
\cline{1-1}
\_\ -10x^2-10x-20 & \\
-10x^2-10x-20 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$r_3(x) = 0$

Остаток оказался равен нулю. Следовательно, последний ненулевой (в данном случае, второй) остаток от деления является искомым наибольшим общим делителем двух многочленов.

НОД$(f(x);g(x)) = r'_2(x) = x^2 - x - 2$

Но при использовании алгоритма Евклида вычисляется и записывается большое количество вспомогательных данных, которые не так важны в получении результата - это так называемые промежуточные остатки.

Чтобы избежать ненужных вычислений и рационально записать процесс деления многочленов, можно использовать табличную форму записи действий, которую предложил М. В. Яковкин [8].

При использовании табличной формы записи деления многочленов место расположения каждой составляющей многочлена определяется степенью переменной при данном члене. Поэтому в таблице можно не отмечать степень переменных, а исключительно только использовать их коэффициенты. Это обеспечит компактность записи.

Все члены делимого записываются в первую строку по убыванию степеней. Все составляющие делителя записываются в левый столбец таблицы также по убыванию степеней, и у всех, кроме первого члена, меняется знак на противоположный. Для того чтобы найти промежуточные результаты, коэффициенты необходимо просто сложить между собой. Частное записывается в самой нижней строчке таблицы. Коэффициенты частного удобно отделить от коэффициентов остатка вертикальной двойной чертой. Чтобы ее отметить в таблице, необходимо в первой строке отсчитать справа налево столько коэффициентов, сколько их в делителе с вычетом единицы и провести вертикальную двойную черту.

Рассмотрим использование данного метода на предыдущем примере и убедимся в верности его решения.

Пример: Найти наименьший общий делитель двух многочленов:

$f(x) = x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$

1) Разделим один из многочленов на другой $-$ $f(x) \div g(x)$.

Делим старший член делимого на старший член делителя и частное записываем в самую нижнюю строку в тот же столбец, где находится старший член делимого.

Затем полученный старший член частного умножаем на все члены левого столбца, за исключением самого первого, и произведение записываем в следующую строку, начиная с последующего столбца.

После этого делаем аналогично с остальными столбцами. И так продолжаем пока все произведения не будут записаны справа от вертикальной двойной черты. При этом получим в самой нижней строке слева от двойной черты члены неполного частного, а справа, сложив между собой все числа по столбикам – члены остатка.

1	1	−4	2	5	2	−4	−8
1		1	1	−1	4	4	
1			−3	−3	3	−12	−12
−1							
4							
4							
	1	−3	0	1	9	−12	−20

$q_1(x) = x - 3$

$r_1(x) = x^3 + 9x^2 - 12x - 20$

2) Теперь разделим делитель на остаток от деления $-$ $g(x) \div r_1(x)$. Аналогично по прошлому действию, находим вторые неполное частное и остаток.

1	1	−1	−1	1	−4	−4
−9		−9	12	20		
12			90	−120	−200	
20				−909	1212	2020
	1	−10	101	−1008	1008	2016

$q_2(x) = x^2 - 10x + 101$

$r_2(x) = -1008x^2 + 1008x + 2016$

НОД многочленов определяется с точностью до числового множителя. Поэтому второй остаток умножим на $\left(-\frac{1}{1008}\right)$.

$r_2'(x) = \left(-\frac{1}{1008}\right)\times(-1008x^2 + 1008x + 2016)$

$r_2'(x) = x^2 - x - 2$

3) Теперь разделим первый остаток от деления на полученный второй $-$ $r_1(x) \div r_2'(x)$. Аналогично по прошлому действию, находим третьи неполное частное и остаток.

1	1	9	−12	−20
1		1	2	
2			10	20
	1	10	0	0

$q_3(x) = x + 10$

$r_3(x) = 0$

НОД(f(x);g(x)) = $r_2'(x) = x^2 - x - 2$

Схема Яковкина деления многочленов довольно проста в использовании, помогает более полно раскрыть логическую взаимосвязь различных операций с многочленами. А также позволяет освободить от лишних и ненужных вычислений, тем самым максимально рационализовать выполнение деления многочленов.

Наибольший общий делитель многочленов - это мощный инструмент алгебры, который находит множество применений в области математики. Он позволяет разложить многочлены на простейшие множители, что делает их анализ и решение задач более простыми и удобными. Знание понятия наибольшего общего делителя многочленов является неотъемлемой частью математического образования, и является обязательным к усвоению для тех, кто собирается глубже погрузиться в алгебру или другие области математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Tsyvinska, A. НОД двух многочленов / Anna Tsyvinska. – Текст : электронный // ПриМат : сайт. – URL: https://ib.mazurok.com/tag/алгоритм-Евклида/ (дата обращения: 17.02.2024).
2. Алгоритм Евклида для решения диофантовых уравнений. – Текст : электронный // uchet-jkh.ru : сайт. – URL: https://uchet-jkh.ru/i/algoritm-evklida-dlya-reseniya-diofantovyx-uravnenii/ (дата обращения: 17.02.2024).
3. Алфутова, Н.Б. Алгебра и теория чисел для математических школ / Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. – 38-е изд. – Москва : МЦНМО, 2002. – 264 с. – Текст : непосредственный.
4. Мельников, Ю.Б. Многочлены (полиномы) : учеб.-метод. пособие / Ю.Б. Мельников. – Екатеринбург : 3-е, 2010. – 495 с. – Текст : непосредственный.
5. Многочлены. Определения и задачи. – Текст : электронный // ВМК+ : сайт. – URL: https://vmk.ucoz.net/Files/mathematics/GA/1-semester/32-metodichka-mnogochleny-opredelenija_i_zadachi.pdf (дата обращения: 17.02.2024).
6. Нестеренко, Ю.В. Кафедра теории чисел / Ю.В. Нестеренко. – Текст : электронный // Теория Чисел : сайт. – URL: http://new.math.msu.su/department/number/dw/doku.php?id=Заглавная (дата обращения: 17.02.2024).
7. Островский, С.Л. "Прадедушка" всех алгоритмов / С.Л. Островский. – Текст : непосредственный // Информатика. – 2008. – № 21. – С. 3-6.
8. Яковкин, М.В. Вычислительные действия над многочленами / М.В. Яковкин. – Москва : Учпедгиз, 1961. – 80 с. – Текст : непосредственный.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Т.А. Оболдина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.ru.

А.И. Хайдуков, студент 3 курса, Институт информационных технологий, точных и естественных наук, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет» г. Шадринск, Россия, e-mail: 18hai29@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

T.A. Oboldina, Ph.D. in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.ru.

A.I. Khaydukov, 3th year Student, Institute of Information Technology, Exact and Natural Sciences, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: 18hai29@gmail.com.