УДК 37.016:51

Татьяна Александровна Оболдина,
Полина Евгеньевна Кед
г. Шадринск

Методы решения уравнений четвертой степени

Авторы статьи рассматривают один из важных вопросов алгебры - уравнения четвертой степени и методы их решения, более подробно описывая два метода: метод Феррари и метод Декарта-Эйлера. В первую очередь рассматривается исторический аспект и основные принципы решения уравнений четвертой степени. Далее подробно описан метод Феррари, основанный на приведении уравнения к квадратному уравнению. В статье также описан метод Декарта-Эйлера, основная идея которого сведение к решению кубического уравнения и комбинаторному перебору корней, с учетом знаков и различных их переборов. Этот метод позволяет эффективно и компактно решать уравнения четвертой степени по сравнению с методом Феррари. После теоретических аспектов данной темы авторы демонстрируют рассмотренные методы на конкретных примерах.

Ключевые слова: уравнения четвертой степени, метод Декарта-Эйлера, метод Феррари.

Tatyana Alexandrovna Oboldina,
Polina Evgenievna Ked
Shadrinsk

Methods for solving the fourth-degree equations

The authors consider one of the important questions of algebra - the fourth-degree equations and methods of their solution, describing in more detail two methods: the Ferrari method and the Descartes-Euler method. First of all, the historical aspect and the basic principles of solving the fourth-degree equations are considered. Then, the Ferrari method is described in detail based on reducing the equation to a quadratic equation. The article also describes the Descartes-Euler method, the main idea of which is to reduce to solving a cubic equation and combinatorial enumeration of roots taking into account signs and their various iterations. This method makes it possible to solve the fourth-degree equations efficiently and compactly compared to the Ferrari method. After the theoretical aspects of this topic, the authors demonstrate the considered methods with specific examples.

Keywords: the fourth-degree equations, the Descartes-Euler method, the Ferrari method.

Уравнения четвертой степени и методы их решения представляют собой важный аспект в области математики, привлекающий внимание математиков на протяжении столетий. В отличие от уравнений низших степеней, решение уравнений четвертой степени представляет собой более сложную задачу из-за отсутствия общего алгебраического метода.

В конце XV – начале XVI веков наступил период бурного развития математики, исследователи начали разрабатывать различные методы решения уравнений. Именно в это время важную роль сыграли такие итальянские математики, как Джероламо Кардано и Лодовико Феррари, внесшие значительный вклад в изучении теоретических и практических вопросов решения уравнений четвертой степени [2].

Известный математик Лодовико Феррари ещё в XVI в. описал решение уравнения четвертой степени. Это решение было основано на преобразовании исходного уравнения в два квадратных. Хотя это метод был эффективным, он требовал доработок и усовершенствований [6]. В XVII в. французский математик Рене Декарт и швейцарский математик Леонард Эйлер разработали иной способ решения уравнений четвертой степени, который в настоящее время называют методом Декарта-Эйлера.

Данный метод основан на замене переменных и приведении его к кубической форме. Этот метод позволил эффективно и менее трудоёмко получить решение уравнения четвертой степени по сравнению с первым рассматриваемым методом [8].

Рассмотренные методы решения уравнения четвертой степени достаточно трудоёмки и сложны и, на основании этого, их лучше демонстрировать в старших классах т. к. учащиеся имеют уже все основные знания по алгебре и способны изучить более сложные математические выкладки.

Рассмотрим в общем виде уравнение четвертой степени:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \ (1)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 – некоторые действительные числа, где $a_0 \neq 0$.

Опишем, в чём заключается метод Феррари.

Данный метод состоит их двух этапов.

На первом этапе исходное уравнение (1) представляют как уравнение четвертой степени, не содержащее членов с третьей степенью.

На втором этапе, уже полученное уравнение решают, используя разложение на множители [7].

Так как старший коэффициент $a_0 \neq 0$, то разделим на a_0 уравнение (1):

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ (2)$$

где a, b, c, d – некоторые действительные числа.

В полученном уравнении $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (2) выполним замену

$$x = z - \frac{a}{4}, \ (3)$$

где z – новая переменная [4].

Выполним преобразования, подставив выражение в уравнение. В результате получим неполное уравнение четвертой степени относительно z.

$$z^4 + z^2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right) + z\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right) - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ca}{4} + d = 0. \ (4)$$

Снова введем новые обозначения коэффициентов:

$$l = b - \frac{3a^2}{8}, \ m = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c, \ n = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ca}{4} + d,$$

И получим уравнение $z^4 + lz^2 + mz + n = 0$, (5)

где l, m, n – некоторые действительные числа.

Выполним ещё преобразования, прибавляя и вычитая к левой части уравнения (5) выражение

$$2tz^2 + t^2,$$

где t – некоторое число. Из (5) получим

$$z^4 + lz^2 + mz + n = z^4 + 2tz^2 + t^2 + (l - 2t)z^2 + mz + n - t^2 =$$

$$= \left(z^2 + t\right)^2 + (l - 2t)\left(z^2 + 2 \cdot \frac{mz}{2(l - 2t)}\right) + n - t^2 =$$

$$= \left(z^2 + t\right)^2 + (l - 2t)\left(z^2 + 2 \cdot \frac{mz}{2(l - 2t)} + \frac{m^2}{4(l - 2t)^2}\right) + n - t^2 - \frac{m^2}{4(l - 2t)^2} =$$

$$=\left(z^2+t\right)^2+\left(l-2t\right)\left(z+\frac{mz}{2\left(l-2t\right)}\right)^2+n-t^2-\frac{m^2}{4\left(l-2t\right)^2}.$$

В итоге уравнение (5) можно записать в виде:

$$\left(z^2+t\right)^2+\left(l-2t\right)\left(z+\frac{mz}{2\left(l-2t\right)}\right)^2+n-t^2-\frac{m^2}{4\left(l-2t\right)^2}=0. \quad (6)$$

Заметим, что выбирая число t необходимо, чтобы оно было решением уравнения

$$n-t^2-\frac{m^2}{4\left(l-2t\right)^2}=0, \quad (7)$$

При этом уравнение (6) примет вид

$$\left(z^2+t\right)^2+\left(l-2t\right)\left(z+\frac{mz}{2\left(l-2t\right)}\right)^2=0. \quad (8)$$

Преобразуем ещё раз уравнение, освободившись от знаменателя

$$2t^3-lt^2-2nt+nl-\frac{m^2}{4}=0. \quad (9)$$

Получили *кубическую резольвенту* уравнения четвертой степени (5).

$$\left(z^2+t\right)^2+\left(l-2t\right)\left(z+\frac{m}{2\left(l-2t\right)}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(z^2+t\right)^2-\left(l-2t\right)\left(z-\frac{m}{2\left(l-2t\right)}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(z^2+t\right)^2-\left(z\sqrt{2t-l}-\frac{m}{2\sqrt{2t-l}}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(z^2-z\sqrt{2t-l}+\frac{m}{2\sqrt{2t-l}}+t\right)\cdot\left(z^2+z\sqrt{2t-l}-\frac{m}{2\sqrt{2t-l}}+t\right)=0.$$

Итак, для решения уравнения (8) необходимо решить два квадратных уравнения

$$z^2-z\sqrt{2t-l}+\frac{m}{2\sqrt{2t-l}}+t=0, \quad (10)$$

$$z^2+z\sqrt{2t-l}-\frac{m}{2\sqrt{2t-l}}+t=0. \quad (11)$$

В результате исходное уравнение четвертой степени решается как последовательное решение одного кубического и двух квадратных уравнений.

Продемонстрируем на примере данный метод.

Пример. Решить уравнение $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$ (13).

Решение.

В исходном уравнении (13) произведём замену по формуле (3) и выполним подстановку

$$x=y+\frac{1}{2} \quad (14);$$

$$x^4-2x^3+2x^2+4x-8=\left(y+\frac{1}{2}\right)^4-2\left(y+\frac{1}{2}\right)^3+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)-8=$$

$$=y^4+\frac{1}{2}y^2+5y-\frac{91}{16}.$$

Получим уравнение

$$y^4+\frac{1}{2}y^2+5y-\frac{91}{16} \ (15).$$

Коэффициенты уравнения (15) равны:

$$l=\frac{1}{2},\ m=5,\ n=-\frac{91}{16} \ (16).$$

Кубическая резольвента для уравнения (15) имеет вид:

$$2t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{91}{8}t-\frac{291}{32}=0 \,|: 2;$$

$$t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{91}{16}t-\frac{291}{64}=0. \ (17)$$

Найдём корни уравнения $t_1=\frac{3}{4}$, $t_2=-\frac{1}{4}+\sqrt{6}i$, $t_3=-\frac{1}{4}-\sqrt{6}i$.

Подставим значения (16) и t_1 в формулу (10) и получим уравнение $y^2-y+\frac{13}{4}=0$, а затем его корни

,

$$y_1=\frac{1}{2}+\sqrt{3}i,\ y_2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}i. \ (18)$$

Затем аналогичным способом получим уравнение

$$y^2+y-\frac{7}{4}=0,$$

которое имеет корни

$$y_3=\frac{-1+2\sqrt{2}}{2},\ y_4=\frac{-1-2\sqrt{2}}{2}. \ (19)$$

Используя формулу (14), найдём корни уравнения (13) из (18) и (19):

$$x_1=1+\sqrt{3}i,\ x_2=1-\sqrt{3}i,\ x_3=\sqrt{2},\ x_4=-\sqrt{2}.$$

Ответ: $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

Рассмотрим второй метод решения уравнений четвертой степени – метод Декарта-Эйлера. Суть метода состоит в том, что необходимо исходное уравнение преобразовать в неполный вид $x^4+ax^2+bx+c=0$ с помощью замены $x=y-\frac{a}{4}$ [3].

Пусть корнем уравнения будет сумма трех чисел

$$x=y_1+y_2+y_3,$$

тогда выполним замену.

$$(y_1+y_2+y_3)^4+a(y_1+y_2+y_3)^2+b(y_1+y_2+y_3)+c=0;$$

$$\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2+2(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\right)^2+a\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2+2(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\right)+$$
$$+b(y_1+y_2+y_3)+c=0;$$

$$\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)^2+4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)^2+$$
$$+a\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+2a(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)+b(y_1+y_2+y_3)+c=0;$$

$$\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)^2+4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+4\left(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2\right)+$$
$$+8y_1y_2y_3(y_1+y_2+y_3)+a\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+2a(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)+$$
$$+b(y_1+y_2+y_3)+c=0.$$

Сгруппируем

$$\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)^2+\left(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3\right)\left(4\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+2a\right)+$$
$$+4\left(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2\right)+\left(y_1+y_2+y_3\right)\left(8y_1y_2y_3+b\right)+a\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+c=0.$$

Предположим, что $8y_1y_2y_3+b=0$ и $4\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+2a=0$. Тогда уравнение запишется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 8y_1y_2y_3+b=0 \\ 4\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+2a=0 \\ \left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)^2+4\left(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2\right)+a\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+c=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_1y_2y_3=-\dfrac{b}{8} \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2=-\dfrac{a}{2} \\ \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+4\left(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2\right)+a\left(-\dfrac{a}{2}\right)+c=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_1y_2y_3=-\dfrac{b}{8} \\ y_1^2y_2^2y_3^2=\dfrac{b^2}{64} \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2=-\dfrac{a}{2} \\ y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2=\dfrac{a^2-4c}{16} \end{cases} \quad [5].$$

Используя теорему Виета, получим кубическое уравнение

$$y^3+\frac{ay^2}{2}+\frac{\left(a^2-4c\right)y}{16}-\frac{b^2}{64}=0 \quad (12)\ [1].$$

Тогда:

$$\begin{cases} x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{y_1}\pm\sqrt{y_2}\pm\sqrt{y_3} \\ \left(\pm\sqrt{y_1}\right)\left(\pm\sqrt{y_2}\right)\left(\pm\sqrt{y_3}\right)=-\dfrac{b}{8} \end{cases} \quad (13),$$

где y_1, y_2, y_3 – корни уравнения (12).

Продемонстрируем метод Декарта-Эйлера на примере.

Пример. Решить уравнение $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$ (14).

Решение.

Приведем уравнение (14) в неполный вид, выполнив замену:

$$x=y-\frac{a}{4}=y-\frac{-1}{4}=y+\frac{1}{4}.$$

Подставим это выражение в уравнение:

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^4-\left(y+\frac{1}{4}\right)^3-4\left(y+\frac{1}{4}\right)^2-\left(y+\frac{1}{4}\right)+1=0$$

и получим неполное уравнение

$$y^4-\frac{35}{8}y^2-\frac{25}{8}y+\frac{125}{256}=0 \quad (15).$$

Допустим, $y = z_1 + z_2 + z_3$.

Тогда

$$(z_1 + z_2 + z_3)^4 - \frac{35}{8}(z_1 + z_2 + z_3)^2 - \frac{25}{8}(z_1 + z_2 + z_3) + \frac{125}{256} = 0.$$

После преобразований, данное уравнение будет принимать вид

$$\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)^2 + \left(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3\right)\left(4\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right) - \frac{35}{4}\right) +$$

$$+ 4\left(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2\right) + \left(z_1 + z_2 + z_3\right)\left(8 z_1 z_2 z_3 - \frac{25}{8}\right) - \frac{35}{8}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) + \frac{125}{256} = 0.$$

Пусть, $8 z_1 z_2 z_3 - \frac{25}{8} = 0$ и $4\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right) - \frac{35}{4} = 0$. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 8 z_1 z_2 z_3 - \frac{25}{8} = 0 \\ 4\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right) - \frac{35}{4} = 0 \\ \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)^2 + 4\left(y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2\right) - \frac{35}{8}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) + \frac{125}{256} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = \frac{25}{64} \\ z_1^2 z_2^2 z_3^2 = \frac{625}{4096} \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{35}{16} \\ z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2 = \frac{275}{256} \end{cases}.$$

Получим кубическое уравнение по теореме Виета

$$z^3 - \frac{35 z^2}{16} + \frac{275 z}{256} - \frac{625}{4096} = 0,$$

которое имеет корни

$$z_1 = \frac{5}{16}, z_2 = \frac{25}{16}, z_3 = \frac{5}{16}.$$

Теперь нужно отобрать корни уравнения (15) по условию (13).

Путем комбинаций, получим следующие корни

$$y_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}, y_2 = -\frac{5}{4}, y_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}, y_4 = -\frac{5}{4}.$$

Теперь выполним обратную замену и найдем корни уравнения (14)

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = -1, x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_4 = -1.$$

Ответ:15 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, -1, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, -1.$

Решение уравнений четвертой степени сопряжено с определенными вычислительными сложностями, особенно при использовании методов Феррари и Декарта-Эйлера. Сложность расчетов по решению уравнений четвертой степени связана с необходимостью выполнения многочисленных математических преобразований. Это требует глубокого понимания математических понятий, тщательного контроля точности и правильности каждого шага процесса расчета.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Арефьев, В.А. Решение уравнений четвертой степени по методу Феррари / В.А. Арефьев. – URL: https://ark.ru/wp-content/uploads/2019/08/Metody-resheniya-uravneniya-chetvyortoj-stepeni-V.A.-Arefiev.pdf (дата обращения: 10.02.2024). – Текст : электронный.
2. Гиндикин, С.Г. Рассказы о физиках и математиках / С.Г. Гиндикин. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1985. – 182 с. – Текст : непосредственный.
3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров : справочник / С.Г. Гиндикин, Т. Корн. – Москва : Наука, 1973. – 832 с. – Текст : непосредственный.
4. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – 9-е изд. – Москва : Наука, 1968. – 430 с. – Текст : непосредственный.
5. Многочлен 4 степени и его корни. – URL: https://olymp.hse.ru/mirror/pubs/share/854940687.pdf (дата обращения: 15.01.2024).
6. Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики / Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, Э.Ф. Шибасова. – Москва : Просвещение : Учебная литература, 1996. – 320 с. – Текст : непосредственный.
7. Решение уравнений 4-ой степени. Метод Феррари. – URL: https://www.resolventa.ru/spr/algebra/ferrary.htm (дата обращения: 13.01.2024). – Текст : электронный.
8. Михалкин, Е.Н. Гипергеометрическая интерпретация формулы Декарта-Эйлера для решения уравнения четвертой степени / Е.Н. Михалкин. – Текст : непосредственный // Прикладная математика & Физика. – 2021. – № 3. – С. 230-234.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Т.А. Оболдина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.

П.Е. Кед, студентка 3 курса, Институт информационных технологий, точных и естественных наук, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: polinaked6@mail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

T.A. Oboldina, Ph. D. in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.ru.

P.E. Ked, 3th year Student, Institute of Information Technology, Exact and Natural Sciences, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: polinaked6@mail.com.