УДК 378.016:51

Татьяна Александровна Оболдина,
Екатерина Евгеньевна Горева
г. Шадринск

Формирование предметной компетенции будущего учителя математики в курсе алгебры

В статье рассматривается вопрос компетентностного подхода в процессе подготовки будущих учителей математики. Во вступительной части работы обоснована актуальность исследования, представлены исследователи, занимающиеся этой проблемой. В основной части работы авторы раскрывают понятие математической компетенции будущего учителя. На примере раздела из теории многочленов рассматривает сущность схемы Горнера и её применение для школьной математики. В статье обосновано, что знание и применение рассмотренного способа нахождения корней многочлена положительно повлияет на формирование предметной компетенции будущего учителя математики в курсе алгебры.

Ключевые слова: компетентностный подход, предметные компетенции будущего учителя математик, курс алгебры, уравнение высшей степени, многочлен, схема Горнера, корень.

Tatyana Alexandrovna Oboldina,
Ekaterina Evgenievna Goreva
Shadrinsk

Formation of the subject competence of a future mathematics teacher in an algebra course

The article deals with the issue of competence-based approach in the process of training future mathematics teachers. The authors substantiate the relevance of the study and present the researchers dealing with this problem. The authors reveal the concept of mathematical competence of a future teacher. Using the example of the section from the theory of polynomials, the essence of the Gorner scheme and its application for school mathematics are considered. The article proves that the knowledge and application of the considered method of finding the roots of a polynomial will positively affect the formation of the subject competence of a future mathematics teacher in an algebra course.

Keywords: competence approach, subject competencies of a future mathematics teacher, algebra course, equation of the highest degree, polynomial, Gorner scheme, root.

Современная российская высшая школа ориентируется в своем развитии на качественную подготовку конкурентоспособного специалиста. Реализация этого направления предполагает решение ряда приоритетных задач, одна из которых - обеспечение инновационного характера базового образования, в том числе обеспечение компетентностного подхода, взаимосвязи академических знаний и практических умений. Вопросам компетентностного подхода в процессе подготовки будущих учителей посвящены работы В. И. Байденко, В. С. Безруковой, Е. Ф. Зеер, И. А. Зимней, Л. А. Петровской, Н. Ф. Талызиной, А. В. Хуторского и других. Формирование математической компетентности рассмотрено в исследованиях Г. .И Глейзер, Н. А. Глузмана, М. И. Головань, Л. В. Дегтяренко, И. Л. Зиненко, Р. С. Черкасова и других.

В работах выше представленных авторов определяется, что формирование предметной компетентности является важной составляющей профессиональной деятельности будущих учителей. Для будущего учителя математики предметной компетентностью является математическая.

В данной статье её будем понимать, как интегральное свойство личности, характеризующееся наличием глубоких и прочных знаний по математике, умением решать профессиональные проблемы и задачи, возникающие в конкретной ситуации педагогической деятельности, способностью использовать математические методы для достижения значимых результатов и качества в деятельности и включающее личностное отношение к предмету деятельности. Рассмотрим изучение теории многочленов в курсе алгебры, позволяющее формировать предметную компетентность будущих учителей математики. Рассмотрим вопрос отыскания корней многочлена.

В данном случае предметная компетентность будет заключаться в умении выбрать грамотное содержание, применить такие инструменты обучения, которые организуют продуктивную деятельность ученика в соответствии с поставленными образовательными задачами.

Существует несколько способов поиска корней выражения:

• Группировка (вынесение общего множителя, формулы сокращенного умножения, выделение полного квадрата).

• Метод неопределенных коэффициентов.

• Нахождение очевидного корня или деление «уголком» и другие.

Рассмотрим один из эффективных и простых способов – использование схемы Горнера. Данный способ в школьной математике не изучается, но использование его целесообразно для учащихся увлекающихся математикой. Уильям Джордж Горнер - британский математик, в честь которого названа схема Горнера, в 1819 году опубликовал способ приближённого вычисления действительных корней многочлена, который называется теперь способом Руффини-Горнера. Работа была напечатана в философских работах Королевского научного общества.

В XIX — начале XX века метод Горнера занимал значительное место в английских и американских учебниках по алгебре. Де Морган показал широкие возможности метода Горнера в своих работах.

Решение многих практических задач сводится к решению различных видов уравнений, с этим поможет справиться схема Горнера. Изучив схему Горнера можно научиться решать: уравнения, разложение многочлена на множители и разделить многочлен на одночлен. Зная схему Горнера, можно решить уравнение любой степени с целочисленными корнями [1,2,3,4,5].

Схема Горнера, основанная на теореме Безу.

Теорема 1 (Безу). Остаток от деления многочлена $F(x)$ на линейный двучлен $(x-a)$ равен значению многочлена в точке, т. е. числу $F(a)$

Следствие 1. Для того чтобы многочлен $F(x)$ делился на двучлен $(x-a)$, необходимо и достаточно, чтобы $F(a)=0$, т. е. чтобы а было корнем многочлена F.

Очень часто в школьной математике оперируют с многочленами, у которых все коэффициенты целые. Тогда действует теорема 2:

Теорема 2. Если все коэффициенты многочлена — целые числа, то каждый его рациональный корень $\frac{p}{q}$ имеет числителем p делитель свободного члена a_0, а знаменателем q — делитель старшего коэффициента

Теперь мы можем перейти непосредственно к схеме Горнера.

Схема Горнера — это алгоритм деления многочленов, записанный для частного случая, когда частное равно двучлену $(x-a)$.

Пусть $P(x)=a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ — делимое, $Q(x)=b_{n-1}b^{n-1}+b_{n-2}b^{n-2}+...+b_0$ — частное (очевидно, что его степень меньше на один), r — остаток, константа.

По определению деления с остатком $P(x) = Q(x)(x-a)+r$, подставляя в это выражение получим: $a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = (b_{n-1}b^{n-1} + b_{n-2}b^{n-2} + ... + b_0)(x-a)+r$

Раскрываем скобки и приравняем коэффициенты при равных степенях.

Таблица 1.

Схема Горнера

Коэффициенты при одинаковых степенях	Выражение коэффициентов b_i через коэффициенты a_i
$a_n = b_{n-1}$	$b_{n-1} = a_n$
$a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$	$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1}$
...	...
$a_i = b_{i-1} - ab_i$	$b_{i-1} = ab_i + a_i$
...	...
$a_0 = r - ab_0$	$r = ab_0 + a_0$

Для удобства данную таблицу принято записывать в строчке в следующем виде:

Таблица 2.

Схема Горнера[6,7,8,9].

	a_n	...	...	a_k	...	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	...	b_k	$b_{k-1} = ab_k + a_k$	...	$r = ab_0 + a_0$

Если даны $\{a_0 ... a_n\}$ и $\{b_0 ... b_n\}$— числа, и предполагая, что число a является корнем многочлена, тогда записываем его слева в таблицу, затем сносим первый элемент таблицы, а для каждого элемента до конца умножаем предыдущий элемент строки на a и прибавляем к строке.

Если в конце (в остатке на деление на a) мы получили 0, то тогда число является корнем уравнения, а получившиеся элементы строки — коэффициентами перед соответствующими x, смещенными на один влево.

Чтобы понять механизм работы этой схемы продемонстрируем на конкретном примере. Найдем корни уравнения $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

1. Записываем коэффициенты уравнения в таблицу

	1	-1	-8	12

2. Находим предположительные корни. Они равны делителям свободного члена, в нашем случае это $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

3. Проверяем очевидные корни, к примеру 1. Проверить, является ли число 1 корнем уравнения, можно простой подстановкой (в данном случае $1-1-8+12 \neq 0$, следовательно, 1 не является корнем).

Проверим является ли число -1 корнем уравнения. Подставим в уравнение значение -1 и получим $-1-1+8+12 \neq 0$ следовательно -1 не является корнем.

Трудности начинаются, когда проверяются большие корни и возводятся в высокие степени. Для этого нам необходима таблица

	1	-1	-8	12
2				

4. Сносим левое значение таблицы вниз.

	1	-1	-8	12
2	1			

5. Заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец:

	1	-1	-8	12
2	1	$2\cdot 1-1=1$	$2\cdot 1-8=-6$	$2\cdot(-6)+12=0$

В последней строчке получился 0. Остаток от деления многочлена на $x-2$ равен нулю, то есть 2 — это корень нашего уравнения. Выполним проверку: $x^3-x^2-8x+12=(x-2)(x^2+x\ -6)$. Левая часть равна правой, следовательно, корень найден верно.

Далее перед нами открывается два способа дальнейшего решения. Первое, можно решить получившееся квадратное уравнение. Второе, продолжить решение по схеме Горнера. Выполним оба решения и сверим получившиеся ответы.

Продолжаем решение по схеме Горнера. Строка - это новые коэффициенты перед x, поэтому мы можем опять, не выходя из таблицы решить это уравнение. Предположим, что новый корень -3. Запишем таблицу.

	1	-1	-8	12
2	1	1	-6	0
-3				

Опять сносим первый коэффициент и умножаем предыдущий столбец на 3 и прибавляем верхнее значение. Важно не запутаться, что теперь нас не интересует первая строка, и вычитаем мы только числа из новой строки.

	1	-1	-8	12
2	1	1	-6	0
-3	1	-2	0	

В последнем столбце получился ноль, значит -3 - это корень уравнения. Последний корень равен двум, и таблица заканчивается.

	1	-1	-8	12
2	1	1	-6	0
-3	1	-2	0	
2	1	0		

Сейчас решим квадратное уравнение и найдем корни

$$(x-2)(x^2+x-6)=0$$

$$x^2+x-6=0$$

$$D=1+4\cdot 1\cdot 6=25$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot 1}=2$$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\cdot 1} = -3$

Корни получились одинаковыми – $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = -3$. Можем сделать вывод, что схема Горнера работает.

Сейчас решим более сложное уравнение с помощью Схемы Горнера

$x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0$

Шаги решения не изменяются.

Для начала записываем коэффициенты уравнения в таблицу:

	1	6	11	2	-12	-8

Находим предположительные корни: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Сносим первое значение и заполняем таблицу

	1	6	11	2	-12	-8
-1	1	5	6	-4	-8	0

Следует проверить -1 ещё раз, так как это может оказаться корень n-кратности

	1	6	11	2	-12	-8
-1	1	5	6	-4	-8	0
-1	1	4	2	-6	-2	

$x = -1$ корень $f(x)$ однократный

Теперь проверим 1

	1	6	11	2	-12	-8
-1	1	5	6	-4	-8	0
~~-1~~	~~1~~	~~4~~	~~2~~	~~-6~~	~~-2~~	
1	1	6	12	8	0	

Проверим 1 на кратность

	1	6	11	2	-12	-8
-1	1	5	6	-4	-8	0
~~-1~~	~~1~~	~~4~~	~~2~~	~~-6~~	~~-2~~	
1	1	6	12	8	0	
1	1	7	19	27		

$x = 1$ корень $f(x)$ однократный

Проверим 2

	1	6	11	2	-12	-8
-1	1	5	6	-4	-8	0
~~-1~~	~~1~~	~~4~~	~~2~~	~~-6~~	~~-2~~	
1	1	6	12	8	0	
~~1~~	~~1~~	~~7~~	~~19~~	~~27~~		
2	1	8	28	64		

Последний столбец не 0, следовательно, 2 не является конем

Пробуем -2

	1	6	11	2	-12	-8
-1	1	5	6	-4	-8	0

-1	1	4	2	-6	-2	
1	1	6	12	8	0	
1	1	7	19	27		
2	1	8	28	64		
-2	1	4	4	0		
-2	1	2	0			
-2	1	0				

$x=-2$ корень $f(x)$ трехкратный

Мы нашли все 5 корней.

$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)^3=(x^2-1)(x+2)^3$

Таким образом благодаря Схеме Горнера можно решать уравнения более высоких степеней, более легким способом. Благодаря этой схеме можно не только находить корни многочлена, но и определять их кратность, а также раскладывать многочлен в виде произведения одночленов.

Благодаря схеме Горнера можно решить 21 задание ОГЭ. Для примера возьмем задание из сборника А. Ларина «Решаем ОГЭ» 223 вариант.

Решите уравнение: $(x^2+21x+90)\cdot(x^2-7x+10)=28x^2$

Решение:

1. Перемножим скобки между собой

$(x^4+14x^3-47x^2-420x+900)=28x^2$

2. Приравниваем левую часть к нулю

$x^4+14x^3-75x^2-420x+900=0$

3. Составляем схему Горнера.

Так как число 900 большое и делителей у него много, то мы найдем 2 корня по схеме Горнера, а затем решим полученное квадратное уравнение с помощью дискриминанта.

	1	14	-75	-420	900
-5	1	9	-120	180	0
6	1	15	-30	0	

Теперь мы можем решить получившееся квадратное уравнение:

$x^2+15x-30=0$

$D=225+4\cdot1\cdot30=345$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{345}}{2\cdot1}$$

$$x_1=\frac{-15+\sqrt{345}}{2}$$

$$x_2=\frac{-15-\sqrt{345}}{2}$$

Ответ: $x_1=\dfrac{-15+\sqrt{345}}{2}, x_2=\dfrac{-15-\sqrt{345}}{2}, x_3=-5, x_4=6$

Так же Схемой Горнера можно воспользоваться в 10 классе при изучении темы «Рациональные уравнения и неравенства с одной переменной». Возьмём в качестве примера уравнение: $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$

Предположительные корни: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

При постановке корней 1 и -1 мы не получаем 0, следовательно, данные значения не являются корнями данного уравнения

Проверим остальные корни с помощью схемы Горнера

	6	5	-38	5	6
2	6	17	-4	-3	0
~~2~~	~~6~~	~~29~~	~~54~~	~~105~~	
~~-2~~	~~6~~	~~5~~	~~-14~~	~~25~~	
-3	6	-1	-1	0	

Получили два корня уравнения $x_1=2, x_2=-3$

Теперь решим получившееся квадратное уравнение, чтобы найти ещё два оставшихся корня

$$6x^2-x-1=0$$

$$D=1+4\cdot6\cdot1=25$$

$$x_3=\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}$$

$$x_4=\frac{1-5}{12}=-\frac{1}{3}$$

Таким образом, с помощью схемы Горнера найдены корни и решено уравнение.

Так же с помощью схемы Горнера можно решить 116 упражнение из того же учебника, которое звучит так:

Докажите, что уравнения $x^3-2x^2+9x-18=0$ и $3x+17=7x+9$ имеют одинаковые рациональные корни

Для начала приведём второе уравнение к стандартному виду:

$$4x-8=0$$

Посмотрев на свободные члены, в нашем случае это 18 и 8, можем сделать вывод, что общих делителей у данных чисел не так много, а именно $\pm1, \pm2$

Если внимательно посмотреть на уравнение 2, то можно найти корень данного уравнения устно, это будет 2. Тогда проверим по схеме Горнера первое уравнение, является ли 2 его корнем:

	1	-2	9	-18
2	1	0	9	0

Действительно, 2 является корнем первого уравнения

Таким образом, доказали, что уравнения $x^3-2x^2+9x-18=0$ и $3x+17=7x+9$ имеют одинаковый рациональный корень, а именно 2.

Схема Горнера помогает в решении уравнений высших степеней. С помощью данной схемы возможно разложение на множители, которое позволяет упростить решение достаточно сложного уравнения высших степеней. Знание и применение рассмотренного способа нахождения корней многочлена положительно повлияет на формирование предметной компетенции будущего учителя математики в курсе алгебры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Волков, Е.А. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера / Е.А. Волков. – Текст : непосредственный // Численные методы : учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – Москва : Наука, 1987. – С. 27-29.

2. Глебова, М.В. Практические занятия по алгебре многочленов : учеб.-метод. пособие / М.В. Глебова, В.Ф. Тимербулатова. – Пенза : ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2012. – 52 с. –Текст : непосредственный.

3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры : учебник / А.Г. Курош. – 21-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2020. – 432 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/126713 (дата обращения: 11.02.2024). – Режим доступа: по подписке ЭБС «Лань». – Текст : электронный

4. Ларин, С.В. Алгебра: многочлены : учеб. пособие для сред. профес. образования / С.В. Ларин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2024. – 136 с. – (Профессиональное образование). – URL: https://urait.ru/bcode/540287 (дата обращения: 11.02.2024). – Режим доступа: по подписке ЭБС «Юрайт». – Текст : электронный.

5. Ларин, С.В. Методические вопросы алгебры многочленов : монография / С.В. Ларин ; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2008. – Текст : непосредственный.

6. Ляпин, Е.С. Курс высшей алгебры / Е.С. Ляпин. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 368 с. – URL: http://e.lanbook.com/book/246 (дата обращения: 11.02.2024). – Режим доступа: по подписке ЭБС «Лань». – Текст : электронный.

7. Окунев, Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре : учеб. пособие / Л.Я. Окунев. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 192 с. – URL: http://e.lanbook.com/book/290. – Режим доступа: по подписке ЭБС «Лань». – Текст : электронный.

8. Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре : учеб. пособие / Д.К. Фаддеев. – 7-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2020. – 416 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/126709 (дата обращения: 11.02.2024). – Режим доступа: по подписке ЭБС «Лань». – Текст : электронный.

9. Ястребов, А.В. Методика преподавания математики: теоремы и справочные материалы : учеб. пособие для вузов / А.В. Ястребов, И.В. Суслова, Т.М. Корикова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2024. – 199 с. – (Высшее образование). – URL: https://urait.ru/bcode/538173 (дата обращения: 11.02.2024). – Режим доступа: по подписке ЭБС «Юрайт». – Текст : электронный.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Т.А. Оболдина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.ru.

Е.Е Горева, студентка 3 курса, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: goreva2002@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

T.A. Oboldina, Ph. D in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Mathematics and Computer Science and Technology, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.ru.

E.Y. Goreva, 3th year Undergraduate Student, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: goreva2002@gmail.com.